EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….016**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{5}+2i$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $E(3,4)$ la dreapta $x+y+3=0$ **.**

(4p) **c)** Să se scrie ecuația cercului cu centrul în $E(3,4)$ şi care este tangent dreptei $x+y+3=0$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(1,2)$, $M(3,3)$ şi $N(5,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,4)$, $B(1,4,1)$, $C(4,1,1)$ şi $D(-1,0,-3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(2+3i)(4+5i)=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se arate că $C_{x+1}^{y+1}=\dfrac{x+1}{y+1}C_x^y$, $\forall x,y\in \mathbf{N}^*, x\ge y$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in \mathbf{Z_8}$ să verifice relația $\hat{x}^2=\hat{1}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+10$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(11)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 3^x+9^x=15$.

(3p) **e)** Să se calculeze produsul tuturor rădăcinilor polinomului $f=X^3-X^2-2X+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{2007}+1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe intervalul $(0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 (e^x+\sin x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $K=\left\{\hat{a}X+\hat{b}\,\middle|\,\hat{a},\hat{b}\in \mathbf{Z}_5\right\}$ şi polinomul $f=X^2+\hat{2}\in \mathbf{Z}_5[X]$.

Pe mulțimea K se consideră legile "+" (adunarea polinoamelor cu coeficienți în corpul $\mathbf{Z}_5$) şi "$\circ$" definită prin $\left(\hat{a}X+\hat{b}\right)\circ\left(\hat{c}X+\hat{d}\right)=\left(\hat{a}\hat{d}+\hat{b}\hat{c}\right)X+\hat{b}\hat{d}+\hat{3}\hat{a}\hat{c}$.

(4p) **a)** Să se arate că polinomul f nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_5$.

(4p) **b)** Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbf{Z}_5[X]$.

(4p) **c)** Să se verifice că $\left[\left(\hat{a}X+\hat{b}\right)\circ\left(\hat{c}X+\hat{d}\right)\right]\circ\left(\hat{u}X+\hat{v}\right)=\left(\hat{a}X+\hat{b}\right)\circ\left[\left(\hat{c}X+\hat{d}\right)\circ\left(\hat{u}X+\hat{v}\right)\right]$, $\forall\, \hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d},\hat{u},\hat{v}\in \mathbf{Z}_5$.

(2p) **d)** Să se arate că

$$\left(\hat{a}X+\hat{b}\right)\circ\left[\left(\hat{c}X+\hat{d}\right)+\left(\hat{u}X+\hat{v}\right)\right]=\left[\left(\hat{a}X+\hat{b}\right)\circ\left(\hat{c}X+\hat{d}\right)\right]+\left[\left(\hat{a}X+\hat{b}\right)\circ\left(\hat{u}X+\hat{v}\right)\right],$$

$\forall\, \hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d},\hat{u},\hat{v}\in \mathbf{Z}_5$.

(2p) **e)** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii K.

(2p) **f)** Să se arate că, dacă $\hat{a}\neq\hat{0}$ sau $\hat{b}\neq\hat{0}$, atunci elementul $\hat{a}X+\hat{b}$ este simetrizabil în raport cu legea "$\circ$".

(2p) **g)** Să se arate că $\underbrace{g\circ g\circ\ldots\circ g}_{de\ 25\ de\ ori}=g$, $\forall\, g\in K$.

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru $a>0$ se consideră şirurile $a_n=\left(1-\dfrac{1}{n^a}\right)^n$,

$$b_n=\left(1-\frac{1}{(n+1)^a}\right)\left(1-\frac{1}{(n+2)^a}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(2n)^a}\right),\quad c_n=\left(1-\frac{1}{(2n)^a}\right)^n,\quad n\in\mathbf{N}^*.$$

(4p) **a)** Să se arate că $a_n\le b_n\le c_n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $a=1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{e}$.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $a=1$, atunci $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\lim\limits_{n\to\infty}c_n<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $a=1$, atunci şirul $(b_n)_{n\ge1}$ este constant.

(2p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, pentru $a<1$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$, pentru $a>1$.

(2p) **g)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\ge1}$ este convergent pentru orice $a>0$.